Erros Numéricos

Laura Goulart

UESB

27 de Novembro de 2018

Durante as etapas de resolução de um problema surgem vários fontes de erros que podem alterar profundamente os resultados obtidos. É importante conhecer as causas desses erros para minimizar as suas consequências, ou do contrário, poderemos chegar a resultados distantes do que se esperaria ou até mesmo obter outros que não tem relação nenhuma com a resolução do problema real.

Erros nos Dados de Entrada

Os erros nos dados de entrada proveêm dos erros que podem ocorrer durante medições de um experimento ou no uso incorreto dos intrumentos de medida.

Erro no Estabelecimento do Modelo Matemático

Ao estabelecer o modelo matemático procura-se o método numérico que apresenta soluções dentro de uma precisão desejada com custo computacional baixo. Esses métodos fornecem aproximações para o que seria a solução exata. Os erros cometidos nestas aproximações são decorrentes da discretização do problema. Ou seja, ao se tentar representar um fenômeno físico por meio de um modelo matemático, somos forçados , em geral, a aceitar condições que simplificam o problema.

Exemplo

Para o estudo do movimento de um corpo sujeito a uma aceleração constante, têm-se a seguinte equação:

$$d = d_0 + v_o t + \frac{1}{2} a t^2$$

Supondo-se que um engenheiro queira determinar a altura de um edifício e que para isso disponha apenas de uma bolinha de metal, um cronômetro e a fórmula acima, ele sobe então ao topo do edifício e mede o tempo em que a bolinha gasta para tocar o solo, ie, 3 segundos.
Levando este valor à equação da velocidade no MUV, obtêm-se:

$$d = 0 + 0 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 9,8 \cdot 3^2$$

$$d = 44,1 \quad m$$

Este resultado é confiável?

É bem provável que não, pois no modelo matemático não foram consi-deradas outras forças como, por exemplo, a resistência do ar ou a velocidade do vento. Além destas, existe um outro fator que tem muita influência: a precisão da leitura do cronômetro, pois para uma pequena variação no tempo medido existe uma grande variação na altura do edifício. Se o tempo medido fosse 3,5 segundos ao invés de 3 segundos, a altura do edifício seria de 60 m. Em outras palavras, para uma variação de 16,7 % no valor lido no cronômetro, a altura calculada apresenta uma variação de 36 %.

Com este exemplo pode-se notar a grande influência que o modelo matemático e a precisão dos dados exercem sobre a confiabilidade da resposta conseguida.

Estabilidade Numérica

Dizemos que um problema(ou método numérico ou algoritmo) é *estável* quando pequenas pertubações nos dados de entrada provocam pequenas pertubações nos resultados obtidos.

Condicionamento de Algoritmos

Um problema(ou método numérico ou algoritmo) é dito *bem-posto* quando se tem uma única solução e ele é estável. Entretando, pode acontecer o caso do problema ser bem posto e, no cálculo das soluções aproximadas, usa-se algoritmos instáveis obtendo-se maus resultados.

Condicionamento de Algoritmos

Um problema(ou método numérico ou algoritmo) é dito *bem-posto* quando se tem uma única solução e ele é estável. Entretando, pode acontecer o caso do problema ser bem posto e, no cálculo das soluções aproximadas, usa-se algoritmos instáveis obtendo-se maus resultados.

Exemplo

Considere a equação $x^2 - 100,22x + 1,2371 = 0.$

O arredondamento é inerente à estrutura da máquina e ao uso de uma aritmética de precisão finita. , ie, com um número finito de algarismos significativos. Assim, se o número de algoritmos significativos é cinco e quisermos introduzirmos o dado $x = 2,73589$; o valor armazenado será $\tilde{x} = 2,7359$. A diferença entre esses valores é o *erro de arrendodamento*. Quando estamos usando um processo de razoável esforço computacional, os erros de arredondamento cometidos após cada operação se propagam de maneira acumulativa e podendo afetar gravemente o resultado final.Procuraremos, de maneira oportuna, estimar a propagação do erro e controlar a incerteza presente nos valores nas diversas operações próprias de um método numérico.

Erros de Truncamento

O erro de truncamento surge toda vez que se substitui um procedimento matemático infinito por um processo finito. Como um processo infinito não se conclui, somos obrigados a adotar uma aproximação após um número finito de passos.
Em muitos casos, o erro de truncamento é precisamente a diferença entre o modelo matemático e o modelo numérico.

Série de Taylor

A generalidade dos métodos numéricos, como veremos ao longo do nosso curso, são baseados na aproximação de funções por polinômios. Para isso, usaremos o desenvolvimento de Taylor, que é uma série de potências, representando de forma exata uma função no interior de um intervalo de convergência.

Série de Taylor

Consideremos uma função f contínua e com derivadas contínuas, de qualquer ordem, nas vizinhanças de $x = a$, então f pode ser representada de forma exata e única, em qualquer ponto na vizinhança de $x = a$ (mais precisamente, no intervalo $(a - r, a + r)$, onde r é o raio de convergência), através da série de potências abaixo, designada de *Série de Taylor em torno de x=a*: .

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)(a)}}{n!}(x-a)^n + \ldots$$

Série de Taylor

Comparando o desenvolvimento polinomial da solução numérica com o desenvolvimento em série de Taylor da solução exata, particularmente para uma certa ordem em que ocorre a discrepância, torna-se possível avaliar o erro de truncamento. Ou seja, nas aplicações práticas, a série de Taylor tem de ser truncada após uma certa ordem n e a expressaremos da seguinte forma:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)(a)}}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x) \tag{1}$$

no qual $R_{n+1}(x)$ representa o erro originado por truncar os termos de ordem $n+1$ e superiores. O erro pode ser ainda expresso por:

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \text{ para algum } a \leq \xi \leq x.$$

Série de Taylor

Como ξ não pode ser determinado de forma exata, o erro de truncamento é frequentemente aproximado fazendo $\xi \to a$.

Exemplo

Do Cálculo Diferencial e Integral, visto no $1^{\underline{o}}$ semestre, sabemos que existe o limite $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ e que seu valor é o número irracional e. Para que esse número seja utilizado, é necessário conhecer seu valor. Através de sua definição não é possível calcular o seu valor exato, tanto pela complexidade das operações como pela impossibilidade de atingir o limite. Recorre-se, então, a um processo de cálculo mais simples, fornecendo um valor aproximado deste número dentro de um certo grau de precisao considerado satisfatório.
Utilizando o desenvolvimento em série de Taylor em torno da origem de e^x temos:

$$e = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}.$$

Truncando a série, por exemplo, após os oito primeiro termos obtemos:

$$\tilde{e} = \sum_{i=0}^{7} \frac{1}{i!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} = 2,7182539$$

cujas as primeiras casas decimais coincidem com o valor exato de e.

A última fonte de erro será humano e/ou da máquina.

Medidas do Erro

A partir do momento em que se calcula um resultado por aproximação, é preciso saber como estimar e delimitar o erro cometido nessa aproximação. As duas medidas que usaremos para quantificar o erro obtido são: o *erro absoluto* e o *erro relativo*.

Medidas do Erro

A partir do momento em que se calcula um resultado por aproximação, é preciso saber como estimar e delimitar o erro cometido nessa aproximação. As duas medidas que usaremos para quantificar o erro obtido são: o *erro absoluto* e o *erro relativo*.
Considere $\tilde{a}$ o valor aproximado de um valor exato a.

Erro absoluto

O **erro absoluto** cometido é dado por $\Delta_a = |a - \tilde{a}|$.

Erro absoluto

O **erro absoluto** cometido é dado por $\Delta_a = |a - \tilde{a}|$.

Exemplo

Seja $a = 100$ *e considere os valores aproximados* $\tilde{a}_1 = 100,1$ *e* $\tilde{a}_2 = 100,009$.

Erro relativo

O **erro relativo** cometido é dado por $\delta_a = \dfrac{|a - \tilde{a}|}{|\tilde{a}|}$.

Erro relativo

O **erro relativo** cometido é dado por $\delta_a = \dfrac{|a - \tilde{a}|}{|\tilde{a}|}$.

Exemplo

Vamos agora calcular o erro relativo do exemplo anterior.

Geralmente, nos cálculos, os números exatos não são conhecidos e deste modo, são substituídos por suas aproximações em uma iteração anterior.

Propriedades

No método iterativo temos:

- $\Delta_i = |x_i - x_{i-1}|$.
- $\delta_i = \dfrac{|x_i - x_{i-1}|}{|x_i|}$.

Cota Superior

Dizemos que um número real $\varepsilon > 0$ é uma cota do erro absoluto(ou do erro relativo) Δ_a se $|\Delta_a| < \varepsilon$ (ou, $|\delta_a| < \varepsilon$)

Falha dos mísseis Patriot

Durante a Guerra do Golfo(1991), o Iraque lançou inúmeros mísseis terra-terra chamados "Scud"(de fabricação soviética) contra Israel e Arábia Saudita. A fim de se protegerem contra esses ataques, as tropas norte-americanas instalaram baterias de mísseis terra-ar "Patriot", os quais haviam sido projetados no início da década de 70 para destruirem mísseis cruzeiros e aeronaves soviéticas, numa eventual guerra entre a OTAN e o Pacto de Varsóvia.

Uma bateria de mísseis "Patriot"consiste de uma unidade de controle computadorizada; de rada de detecção; e de seis lançadores quadruplos de mísseis. A unidade de controle dispões de um relógio que marca o tempo em décimos de segundo, armazenados em uma palavra inteira de 24 bits; os cálculos de determinação das janelas de confirmação e de engajamento (regiões no céu dentro o qual o possível alvo deve ser detectado pelo radar para que possa os mísseis "Patriot"sejam lançados) são feitos em ponto fixo, também de 24 bits.

No dia 25 de fevereiro de 1991, uma bateria "Patriot"instalada em Dharan(Arábia Saudita) deixou de interceptar um míssil "Scud"que se aproximava. Como resultado, 28 soldados norte-americanos foram mortos devido à explosão do míssil "Scud".

Os resultados da investigação, indicaram que os mísseis "Patriot"não engajaram o "Scud"(apesar dos radares haverem detectado o míssil iraquiano) devido a um erro de arredondamento.

Explosão do foguete Ariane 5

No dia 4 de junho de 1996, o primeiro foguete construido pela Agência Espacial Européia, o Ariane 5, foi destruído pelo sistema de controle de falha apenas $40s$ após o lançamento de sua base em Khourou(Guiana Francesa).
Os resultados da investigação, após duas semana do incidente, indicaram que o problema encontrava-se no "software"de guiagem inercial. Um número em ponto flutuante, armazenado numa palavra de 64 bits, e que representava a velocidade horizontal em relação à plataforma de lançamento, foi convertido para um número inteiro de 16 bits. Dessa forma, ocorreu uma falha na conversão e o programa deixou de funcionar.